



شیوه ای نوین در تعیین مدهای طبیعی و فرکانس های متناظر سیستم های با چند درجه آزادی بر اساس مفهوم گره ارتعاش

علی اصغر صفوی*

دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه گلستان، گلستان، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۹/۰۵/۰۴
بازنگری: ۱۴۰۰/۰۱/۱۱
پذیرش: ۱۴۰۰/۰۱/۱۴
ارائه آنلاین: ۱۴۰۰/۰۲/۰۳

کلمات کلیدی:

مدهای طبیعی
فرکانس طبیعی
گره
سیستم با چند درجه آزادی
سیستم های با یک درجه آزادی

خلاصه: روش های گوناگون تحلیل دینامیکی سازه ها با مفهوم مدهای طبیعی سر و کار دارند و در ریاضیات به مدهای طبیعی اصطلاحاً بردارهای مشخصه گفته می شود. روش مرسوم برای تعیین مدهای طبیعی یک سیستم حل مسئله مقادیر ویژه است. در این روش بر اساس ماتریس های سختی و جرم، ماتریس مشخصه ساخته می شود که با صفر قرار دادن دترمینان آن، فرکانس های طبیعی سیستم به دست می آید. با تعیین فرکانس ها، بردار مدهای ارتعاش ساخته می شوند. روشی که در این مقاله بیان می شود مبتنی بر تعیین مکان (مکان هایی) است که در هر شکل مد، جابجایی آن (آن ها) صفر است که به گره موسوم است. در واقع با این روش، یک سیستم با چند درجه آزادی در هر مد به چند سیستم با یک درجه آزادی تبدیل می شود که در محل گره های فرضی از یکدیگر جدا شده اند. جرم های سیستم های مزبور به طور هم زمان، با یک فرکانس ارتعاش می کنند که همان فرکانس ارتعاش در مد مورد نظر است. هر فنری که بین دو جرم مجاور قرار دارد، در محل گره به دو فنر متوالی تفکیک می شود، به طوری که فنر اولیه دارای سختی معادل فنرهای متوالی (سری) است. این روش درک فیزیکی مناسبی برای مفهوم مد ارتعاش ارائه می کند. روش به کار رفته دقیق بوده و در برخی موارد، ساده و سریع تر از روش مرسوم عمل می کند.

۱- مقدمه

۱۸، ۳۰ و ۵۰ طبقه در نظر گرفته و فرایند طراحی آن ها با کمک تحلیل استاتیکی غیرخطی انجام دادند. به این نتیجه رسیدند که مدهای بالاتر بر طبقات بالایی ساختمان های نسبتاً بلند (دوازده و هجده طبقه) و بر طبقات میانی ساختمان های خیلی بلند (سی طبقه و پنجاه طبقه) اثر گذار است. هیون کیم و یانگ کیم [۴] با کمک اندازه گیری محلی^۱ ارتعاشات و روش اجزای محدود به تعیین فرکانس های طبیعی سه مد اول ساختمان های چند طبقه با انواع سیستم سازه ای پرداختند. مشاهده کردند که ضریب الاستیسیته بتن، اعضای غیرسازه ای، سختی خمشی دال ها از عوامل موثر بر پارامترهای دینامیکی سازه ها هستند. ضمناً ایشان به تعیین ضریب میرایی این سازه ها نیز نائل شدند. جلیلی صدر آباد و همکاران [۵] آنالیز دینامیکی سیستم های یک درجه آزادی را با روش انرژی اصلاح شده^۲ انجام دادند. در این روش متناظر با نیروی فنر، نیروی میرایی و نیروی اینرسی، به ترتیب انرژی های پتانسیل، اتلافی و جنبشی تعریف شده است. این کار با انتگرال گیری از طرفین معادله حرکت سیستم یک درجه آزادی نسبت به متغیر X انجام

از مباحثی که در متون پایه ای دینامیک سازه ها به وفور به آن اشاره شده است، موضوع مدها و فرکانس های ارتعاش است. هم اکنون در هر آیین نامه و مقاله ای که درباره مهندسی زلزله و دینامیک سازه ها نوشته می شود بی تردید به این واژه ها اشاره می شود. مفهوم مد و فرکانس در ادبیات فنی دینامیک سازه ها از مفاهیم پایه ای در تحلیل دینامیکی سازه ها است که در مراجع متعددی به آن ها اشاره شده است [۱]. نامجویان و همکاران [۲] رابطه ای جدید در تعیین زمان تناوب تجربی قاب های خمشی فولادی ارائه کردند. به علاوه به بررسی دقت زمان تناوب تجربی پیشنهاد شده در آیین نامه ۲۸۰۰ در مورد قاب های خمشی فولادی و مقایسه آن با زمان تناوب به دست آمده از آنالیز رایانه ای پرداختند. در پژوهش ایشان پانزده ساختمان منظم با سیستم قاب خمشی فولادی از یک تا پانزده طبقه آنالیز گردید. احمدی دانش و رفیعی [۳] اثر مدهای بالاتر را بر رفتار سازه های بلند بررسی کردند. ایشان پنج قاب را با سیستم دوگانه قاب خمشی-دیوار برشی و تعداد طبقات ۵، ۱۲،

1 Field measurement

2 MODIFIED ENERGY METHOD

* نویسنده عهده دار مکاتبات: aasafavy@yahoo.com

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس <https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode> دیدن فرمائید.



شد و با نوشتن dx به صورت $v(t)dt$ ، روابط انرژی به شکل انتگرال‌هایی در حوزه زمان تبدیل شد و برای محاسبه انتگرال معین در حوزه زمان از روش عددی دوزنقه‌ای استفاده گردید. مهدی‌پور و همکاران [۶] و بابازاده و همکاران [۷] در مقالات جداگانه روش توازن انرژی را بر مبنای روش حساب تغییرات برای معادلات دیفرانسیل غیرخطی ارتعاشات به کار بستند. ابتدا در معادله مورد نظر، شرایط اولیه را به صورتی که مقادیر تابع جواب و مشتق آن به ترتیب برابر با دامنه ارتعاش و صفر است، لحاظ کردند و تابع کسینوسی را به عنوان حدس اولیه‌ی پاسخ معادله در نظر گرفتند. پس از حصول معادلات مورد نظر با حل مثال‌هایی، روش خود را با روش‌های دیگر مقایسه کردند. روش‌های به کار رفته در دو مرجع اخیر به ترتیب با روش‌های رونگ-کوتا مرتبه چهار^۱ و حل اغتشاشی هموتوپی^۲ مقایسه شده است.

در ادبیات فنی [۱ و ۱۰-۸] برای بررسی ارتعاشات یک سازه، ابتدا مدل جرم و فنر آن رسم می‌گردد. جرم‌های متمرکز معادل جرم طبقات و سختی فنرها معادل سختی برشی بین طبقات است. سپس ماتریس‌های جرم و سختی مدل نوشته می‌شوند. حال ماتریس جرم در مجذور پارامتر فرکانس ضرب شده، حاصل آن با ماتریس سختی جمع می‌شود. با محاسبه دترمینان ماتریس مجموع و برابری آن با صفر، معادله‌ای حاصل می‌گردد که ریشه‌های آن، فرکانس مدهای مختلف خواهد بود. هر بار در ماتریس مجموع، به جای پارامتر فرکانس، فرکانس به دست آمده‌ی یک مد قرار داده می‌شود، حاصل ضرب ماتریس حاصله در بردار شکل مد (نامعلوم) برابر با برداری هم‌مرتبه و با درایه‌های صفر قرار داده می‌شود تا بردار شکل مد تعیین گردد. شایان ذکر است درایه اول را در هر بردار شکل مد برابر با عدد یک در نظر گرفته و آنگاه سایر درایه‌ها بر اساس آن تعیین می‌شوند. پس از تعیین بردار شکل همه‌ی مدها، می‌توان آن‌ها را به ترتیب در یک ماتریس مربعی جای داد که به ماتریس مدال نام‌گذاری شده است. به بردارهای مد، در ریاضیات بردارهای مشخصه نیز گفته می‌شود. خطیبی و همکاران [۱۱] روش تجزیه فرکانسی را به صورت عددی و تجربی بررسی کردند. در بررسی عددی از مدل یک ساختمان ۶ طبقه استفاده کردند و آن را با روش اجزای محدود مدل کرده و پارامترهای مدال آن را تعیین کردند. ضمناً با انجام آزمایش شبیه‌سازی شده روی مدل ساخته شده در یک تحریک اتفاقی، با روش تجزیه فرکانسی پارامترهای مدال را محاسبه کردند و نتایج دو روش را مقایسه کردند. سرپرست و همکاران [۱۲] به شناسایی پارامترهای مدال سازه تحت بار محیطی با استفاده از آنالیز پاسخ پرداختند. ایشان در محیط

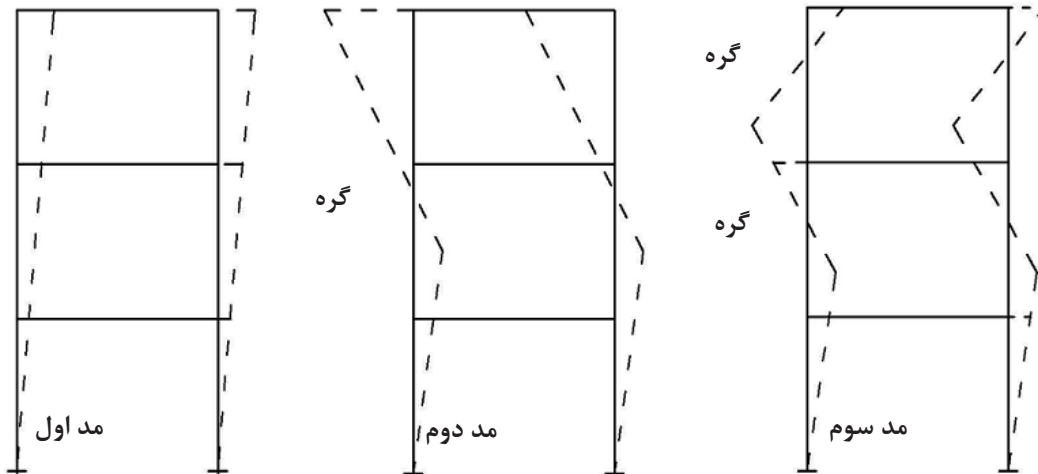
شبیه‌سازی برای یک تیر دو سر گیردار پارامترهای مدال را با روش تجزیه فرکانسی محاسبه و با نتایج روش اجزای محدود مقایسه کردند. سپس یک نمونه پل را که تحت بارهای محیطی است، به عنوان مثال کاربردی بررسی کردند. قندی و رافضی [۱۳] به بررسی تاثیر بار محوری بر ارتعاش آزاد خمشی پیچشی سازه‌های قابی مسطح و سه بعدی با استفاده از روش سیستم پیوسته پرداخته‌اند. در روش سیستم پیوسته، سازه ساختمانی با یک عضو تیری مناسب که شامل مشخصات غالب سازه است، جایگزین می‌شود. با این کار، با حل معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر معادلی که در آن توزیع جرم و سختی یکنواخت فرض شده است، می‌توان فرکانس‌های طبیعی سازه‌های ساختمانی مذکور را محاسبه کرد. رافضی و همکاران [۱۴] ارتعاش سازه‌های قابی سه بعدی نامتقارن را بررسی کردند. سازه‌های مورد نظر از قاب‌های متعامد تشکیل شده بودند که در طبقات مختلف، مشخصات هندسی اعضای آن تغییر می‌کرد. طبقاتی که مشخصات ستون‌ها در آن‌ها تغییر نمی‌کرد، با یک قطعه مدل شد. در هر قطعه، هر قاب از قاب‌های موازی در یک جهت از پلان، با یک تیر برشی مدل می‌شود و اثر همه‌ی تیرهای برشی برای مدل کردن اثر قاب‌های اصلی هم جهت با هم جمع می‌شوند. سپس معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت تیرهای برشی استخراج می‌شود. رافضی و هاوسون^۳ [۱۵] در تحقیقی مشابه با تحقیق پیشین تحلیل ارتعاشی سازه‌های سه بعدی نامتقارنی را که از قاب و دیوار تشکیل شده است، بررسی کردند. در این مطالعه، قاب‌ها با تیر برشی و دیوارها با تیر خمشی مدل شده‌اند. رافضی و هاوسون [۱۶] در تحقیقی دیگر به سازه‌های سه بعدی نامتقارن حاوی دیوار برشی و هسته باربر جانبی پرداختند. با توجه به آنکه در ساختمان‌های بلند عملکرد این عناصر به صورت خمشی است، دیوارهای برشی را با تیر با عملکرد خمشی و هسته‌ها را با تیر با عملکرد خمشی پیچشی مدل کردند. بمبائی‌چی و حسینعلی‌زاده تونی [۱۷] تحلیل دقیق ارتعاش آزاد قاب‌های نیمه‌سخت با تکیه‌گاه‌های نیمه‌صلبی را که مقاطع اعضای آن‌ها از مصالح مدرج تابعی^۴ ساخته شده است، انجام دادند. در واقع مقاطع اعضا، از لایه‌های متفاوت مصالح ساخته شده است که یک مشخصه مکانیکی (مثلاً ضریب الاستیسیته) برای آن‌ها طبق یک تابع مشخص در ضخامت مقطع تغییر می‌کند. ایشان ابتدا معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش آزاد سازه را با فرض اولر-برنولی حل کردند و پاسخ‌ها را بر حسب توابع بسل به دست آوردند. سپس با اعمال شرایط مرزی، ماتریس ضرایب را ساخته، از برابر صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب، معادله مشخصه ارتعاش سازه را به دست

3 W. P. Howson

4 FGM (functionally graded materials)

1 Runge-Kutta method of order 4

2 Homotopy perturbation solution



شکل ۱. مفهوم گره در مدهای ارتعاش

Fig. 1. Concept of node in vibration modes

ارتعاش حل مسئله مقادیر ویژه و معادله مشخصه بوده است، در این مقاله تعیین مدها و فرکانس‌های ارتعاش با شیوه‌ای جدید، ساده و بر اساس مفاهیم اولیه جرم و فنر بیان می‌گردد به طوری که در آن ارتباط و شباهتی با روش مرسوم در ادبیات فنی مشاهده نمی‌شود. برای ورود به مطلب توضیح چند واژه که در متن مقاله زیاد استفاده شده، مفید به نظر می‌رسد:

مد صلب: در سازه‌هایی که از لحاظ استاتیکی ناپایدار هستند، در یک یا چند مد، جابجایی تمامی جرم‌ها یکسان است یا به طور دقیق‌تر به گونه‌ای است که فنرهای معادل سختی‌های بین جرم‌ها دچار تغییر شکل نشده، نیرویی در آن‌ها پدید نیاید. به این مدها مد صلب گفته می‌شود.

فنرهای سری: طرز قرارگیری پشت سر هم تعدادی فنر، به طوری که تغییر طول کلی مجموعه آن‌ها برابر با مجموع تغییر طول تک تک آن‌هاست. فنرهای موازی: آرایشی از فنرها که سبب می‌شود هنگام تغییر شکل، تغییر طول یکسان در فنرها حاصل شود و بار اعمال شده بین فنرها به نسبت سختی‌هایشان تقسیم می‌گردد.

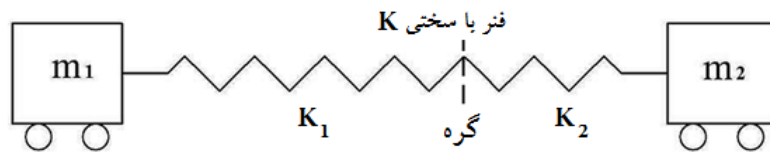
گره: به نقطه‌ای از سیستم که در هر شکل مد، جابجایی آن برابر با صفر است، گره گفته می‌شود.

با توجه به شکل ۱ در مدهای دوم و سوم مدل جرم و فنر سازه، به ترتیب یک و دو گره تشکیل شده است. (گره در مد دوم بین جرم معادل سقف اول و دوم قرار دارد، در مد سوم یک گره بین جرم معادل سقف اول و دوم و گره‌ی دیگر بین سقف دوم و سوم تشکیل می‌شود).

آوردند. پاسخ دینامیکی یک سیستم با دو درجه آزادی مورد بررسی قرار گرفت [۱۸]. در این مطالعه به بررسی شرایط تشدید در ارتعاش سازه پرداخته شد. حل عددی برای ارتعاش آزاد تیرها و ستون‌ها با شرایط تکیه‌گاهی متنوع با کمک روش تریب دیفرانسیلی^۱ و تریب دیفرانسیلی هارمونیک^۲ مورد استفاده واقع شد [۱۹]. نتایج به دست آمده از این روش با نتایج تحلیلی و روش‌های عددی از قبیل روش اجزای محدود مقایسه گردید. اثر سختی تکیه‌گاه‌های ارتجاعی بر فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاش تیرهای دو دهانه تحت ارتعاش آزاد توسط ذاکری و شاه‌بابایی [۲۰] انجام گرفت. ایشان معادلات حاکم بر ارتعاش آزاد تیر دو دهانه با تکیه‌گاه‌های ارتجاعی را به دست آوردند، سپس آن را با نرم‌افزارهای ریاضی حل کرده، نتایج را با نتایج مدل‌سازی در نرم‌افزار اجزای محدود مقایسه کردند. نهایتاً تغییرات فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاش بر اساس سختی‌های تکیه‌گاهی و طول دهانه بررسی شد. روشی خاص در بررسی مدل‌های خطی جرم و فنر با n درجه آزادی بررسی شده است [۲۱] که به مسئله ارتعاش معکوس^۳ اطلاق شده است. این روش بیان می‌کند که چگونه می‌توان ماتریس‌های جرم و سختی را بر مبنای مقادیر فرکانس‌های طبیعی یا سایر مشخصه‌های مکانیکی تجویزی، مجدداً ساخت. مسائل ارتعاش معکوس برای سیستم‌های جرم و فنر در برخی از کاربردها مورد توجه قرار گرفته است.

در مطالعات صورت گرفته، عموماً مبنای تعیین فرکانس‌ها و مدهای

- 1 3 differential quadrature (DQ)
- 2 harmonic differential quadrature (HDQ)
- 3 Inverse vibration problem



شکل ۲. تقسیم فنر اولیه با سختی K، به دو فنر سری از محل گره.

Fig. 2. The primary spring is divided into two serial springs from the node location

ب- مد غیر صلب

با توجه به مفهوم گره، نقطه‌ای به عنوان گره بین دو جرم در نظر گرفته می‌شود و محاسبات بر همین اساس نوشته می‌شود: با توجه به مفهوم گره در شکل ۲ واضح است که دو جرم m_1 و m_2 در این مد، به هم نزدیک یا از هم دور می‌شوند (حرکت آن‌ها در خلاف جهت یکدیگر است).

$$\phi_2 = \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ϕ_2 بردار مد دوم است، در زیرنویس پارامتر ϕ_{12} ، عدد یک نماینده شماره جرم است و عدد دو معرف مد دوم (متناظرا برای ϕ_{22}). هنگامی که در محلی گره تشکیل می‌شود مثل این است که در آن محل، تکیه‌گاه فرض شود و با این کار هر یک از جرم‌ها به بخشی از فنر اولیه متصل هستند. از این رو برای محاسبه فرکانس ارتعاش هر مد، می‌توان مقدار $\sqrt{\frac{k}{m}}$ را برای هر یک از جرم‌ها محاسبه کرد و البته این دو به یک مقدار (فرکانس مد) منجر می‌شوند.

در هر لحظه از ارتعاش آزاد، نیروی کششی یا فشاری (F) که در دو تکه فنر پدید می‌آید با هم برابر ($F_1 = F_2 = |K_1 \phi_{12}| = |K_2 \phi_{22}|$) و جابجایی دو جرم در خلاف جهت یکدیگر است، بنابراین نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\phi_{12}}{\phi_{22}} = -\frac{K_2}{K_1} \quad (2)$$

با توجه به آن که فنر اولیه معادل فنرهای سری K_1 و K_2 است، می‌توان نوشت:

در مقاله حاضر پس از ترسیم مدل جرم و فنر سازه، فنرها بر اساس محل گره‌ها جداسازی شده و سیستم‌های تک درجه آزادی مجزا پدید می‌آید. برای هر مد ارتعاش همه‌ی جرم‌های مجزا با فرکانس زاویه‌ای یکسان ω_i ارتعاش می‌کنند (البته غیر از جرمی که در آن، گره تشکیل شده است). با توجه به مفهوم فرکانس و سختی فنرهای مجزا شده، مدها و فرکانس‌های متناظر تعیین می‌شوند.

در این مقاله برای حل مسائل، گام‌های اساسی زیر انجام می‌گیرد:
الف- ترسیم مدل جرم و فنر.

ب- تشخیص پایداری یا ناپایداری استاتیکی و تعیین مد (های) صلب در صورت ناپایداری.

ج- بررسی تشکیل گره در جرم‌های متمرکز در سیستم‌های پایدار با سه درجه آزادی و بیشتر.

د- نوشتن معادلات لازم بر اساس تشکیل گره بین هر دو جرم متمرکز مجاور و حل آن‌ها.

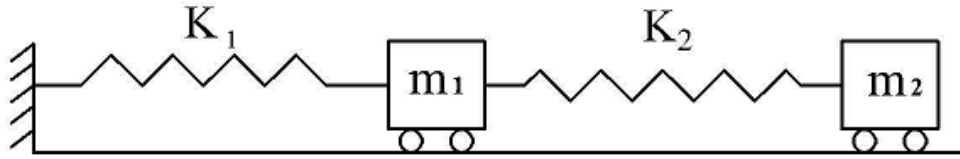
۲- تعیین مدهای ارتعاش و فرکانس‌های متناظر در سیستم‌های دو درجه آزادی

۲-۱ سیستم ناپایدار استاتیکی

با توجه به سادگی موضوع ابتدا به این سیستم که مدل آن تنها شامل دو جرم و یک فنر است پرداخته می‌شود. این سیستم به دلیل عدم وجود تکیه‌گاه از لحاظ استاتیکی ناپایدار است و مد صلب خواهد داشت.

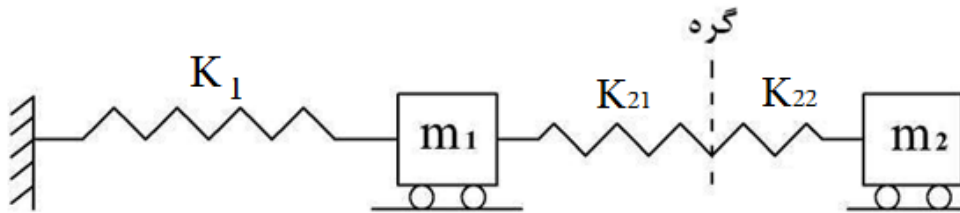
الف- تعیین مد صلب

به خاطر ناپایداری سیستم، یک مد صلب تشکیل می‌گردد. در این مد با توجه به عدم تغییر طول فنر، جابجایی دو جرم یکسان است، بنابراین بردار شکل این مد $\phi = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ است. طبیعی است که فرکانس این مد برابر با صفر است:
 $\omega_1 = 0$



شکل ۳. مدل دینامیکی سیستم پایدار با دو درجه آزادی و یک تکیه گاه.

Fig. 3. Dynamic model of a 2-DOFs stable system which has a support



شکل ۴. سختی فنرهای مجزا شده از محل گره.

Fig.4. The stiffness of divided springs from the node location

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{m_1}{m_2} \end{bmatrix} \quad (۶)$$

$$K = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \quad (۳)$$

محاسبه فرکانس مد غیرصلب:

طبق سطور بیان شده‌ی پیشین، فرکانس ارتعاش در این مد در

تساوی‌های زیر صدق می‌کند:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K_1}{m_1}} = \sqrt{K \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}} \quad (۷)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{K_2}{m_2}} \quad (۴)$$

۲-۲- سیستم پایدار استاتیکی

الف- سیستم با یک تکیه‌گاه

از روابط (۲) تا (۴) به سادگی بردار شکل مد دوم به دست می‌آید:

با توجه به پایداری استاتیکی این سیستم (شکل ۳)، مد صلب به وجود نمی‌آید و برای تعیین مدها و فرکانس‌های متناظر، نقطه‌ی مناسبی را به عنوان گره باید در نظر گرفت. نقطه‌ی نامشخصی در فاصله بین دو جرم در نظر گرفته می‌شود (شکل ۴).

$$\phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \phi_{22} \\ \phi_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{m_1}{m_2} \end{Bmatrix} \quad (۵)$$

در این شکل فنر با سختی K_2 از محل گره به دو فنر سری K_{21} و K_{22} تبدیل شده است:

بنابراین ماتریس مدال به صورت زیر بیان می‌گردد:

معادله (۱۳)، دو ریشه حقیقی دارد که هر یک مقدار K_{21} برای یک مد (اول یا دوم) است:

$$K_2 = \frac{K_{21}K_{22}}{K_{21} + K_{22}} \quad (۸)$$

$$K_{21} = \frac{1}{2} \left\{ K_2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) - K_1 \pm \sqrt{\left[K_2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) - K_1 \right]^2 + 4K_1K_2} \right\} \quad (۱۴)$$

با توجه به یکسان بودن نیروی فنرهای سری در ارتعاش آزاد دو جرم ($F_1 = F_2 = |K_{21}\phi_{1i}| = |K_{22}\phi_{2i}|$) می‌توان نوشت:

$$\phi_i = \begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \end{Bmatrix} \rightarrow \frac{\phi_{1i}}{\phi_{2i}} = -\frac{K_{22}}{K_{21}} \quad (۹)$$

با کمک معادله (۸)، رابطه بین سختی فنرهای سری و سختی K_2 را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{K_{21}}{K_{22}} = \frac{K_{21}}{K_2} - 1 \quad (۱۵)$$

رابطه بالا برای هر مد i ($i \leq 2$) نوشته شده است. در معادله‌های (۹) پارامتر زیرنویس‌دار K ، برای هر مد، مقداری متفاوت با همان پارامتر در مد دیگر دارد. برای فرکانس‌های هردو مد تساوی‌های زیر صادق است:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{K_{e1}}{m_1}} = \sqrt{\frac{K_{e2}}{m_2}} \quad (۱۰)$$

بردار مد به صورت معادله (۱۶) تعیین می‌شود:

$$\phi_i = \begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \end{Bmatrix} \rightarrow \phi_i = \begin{Bmatrix} 1 \\ \phi_{2i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{K_{21}}{K_{22}} \end{Bmatrix} \quad (۱۶)$$

که در آن K_e ها سختی معادل برای محاسبه فرکانس ارتعاش در مد i ام دو جرم است:

$$K_{e1} = K_1 + K_{21} \quad K_{e2} = K_{22} \quad (۱۱)$$

پس می‌توان معادله (۱۲) را نتیجه گرفت:

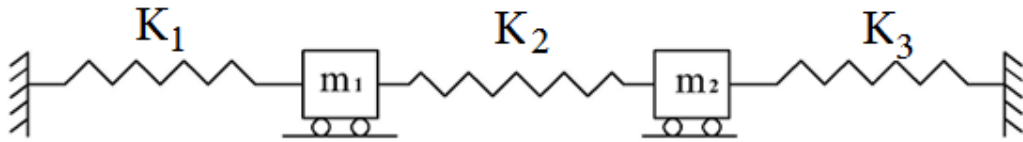
$$\frac{K_1 + K_{21}}{m_1} = \frac{K_{22}}{m_2} \quad (۱۲)$$

با حل همزمان معادلات (۱۰) تا (۱۲)، معادله درجه دوم زیر به دست می‌آید:

$$K_{21}^2 + (K_1 - K_2 - \frac{m_1}{m_2} K_2) K_{21} - K_1 K_2 = 0 \quad (۱۳)$$

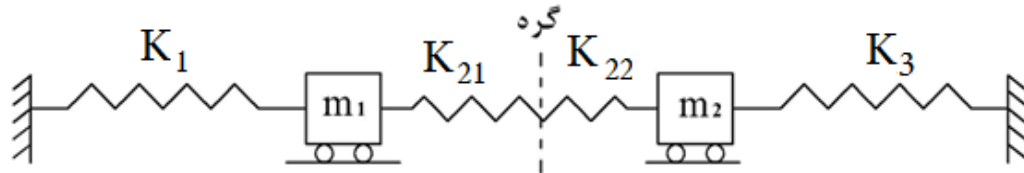
هر یک از علامات مثبت و منفی مربوط به یک مد است. برای فرکانس هر مد می‌توان نوشت:

$$\phi_i = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{m_1}{m_2} - \frac{K_1}{K_2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{m_1}{m_2} - \frac{K_1}{K_2} \right)^2 + 4 \frac{K_1}{K_2}} \right\} + 1 \end{Bmatrix} \quad (۱۸)$$



شکل ۵. مدل دینامیکی سیستم با دو درجه آزادی و دو تکیه گاه.

Fig. 5. Dynamic model of a 2-DOFs system which has two supports



شکل ۶. سختی فنرهای مجزا شده از محل گره برای شکل ۵.

Fig. 6. The stiffness of divided springs from the node location for Figure 5

$$\omega_i = \sqrt{\frac{K_1 + K_{21}}{m_1}} = \sqrt{\frac{K_{22} + K_3}{m_2}} \quad (21)$$

$$\omega_i = \sqrt{\frac{K_1 + K_{21}}{m_1}} \quad (19)$$

با حل معادلات بالا سختی‌های مجزا شده و فرکانس‌های متناظر مدها تعیین می‌گردند:

$$K_{21} = \frac{1}{2} \left[-K_1 + K_2 + \frac{m_1}{m_2} K_2 + \frac{m_1}{m_2} K_3 \pm \right] \quad (22)$$

$$\sqrt{K_1^2 + 2K_1K_2 + K_2^2 + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 (K_2^2 + 2K_2K_3 + K_3^2) - 2\frac{m_1}{m_2} (-K_2^2 + K_1K_2 + K_1K_3 + K_2K_3)}$$

البته ساده‌تر است که برای مقادیر مشخص جرم‌ها و سختی‌ها، معادلات داده شده را به یک نرم‌افزار ریاضی وارد کرد و مقادیر سختی‌های جدا شده از محل گره، فرکانس‌ها و بردارهای مد را یافت.

برای بردار مد \vec{i} ، با توجه یکسان بودن نیروی فنرهای سری (می‌توان نوشت $(i \leq 2)$):

$$\phi_i = \begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \end{Bmatrix} \rightarrow \frac{\phi_{1i}}{\phi_{2i}} = -\frac{K_{22}}{K_{21}} \quad (23)$$

طبیعی است که علامت منفی منجر به مقدار کم‌تری برای K_{21} و در نتیجه برای فرکانس می‌شود، بنابراین در عبارتهای محاسبه بردار مد و فرکانس، علامت منفی برای مد اول و مثبت مربوط به مد دوم است.

ب- سیستم با دو تکیه‌گاه

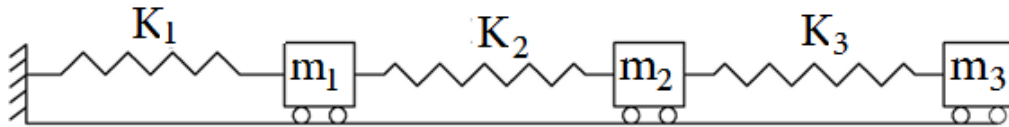
این سیستم به صورت شکل ۵ مدل می‌شود:

در این سیستم بین دو جرم، یک گره در نظر گرفته می‌شود و مشابه حالات گذشته معادلات مورد نیاز به سادگی به دست می‌آیند (شکل ۶):

در این شکل فنر با سختی K_2 ، معادل با دو فنر سری K_{21} و K_{22} است که در محل گره ارتعاش جدا شده‌اند:

$$K_2 = \frac{K_{21}K_{22}}{K_{21} + K_{22}} \quad (20)$$

در هر مد برای فرکانس مد رابطه زیر برقرار است:



شکل ۷. مدل دینامیکی سیستم با سه درجه آزادی و یک تکیه گاه.

Fig. 7. Dynamic model of a 3-DOFs system which has a support

$$\sqrt{\frac{K_1 + K_2}{m_1}} = \sqrt{\frac{K_3}{m_3}} \quad (25)$$

بنابراین بردار مد \bar{i} -ام به سادگی تعیین می‌شود:

$$\phi_i = \begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \end{Bmatrix} \rightarrow \phi_i = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{K_{21}}{K_{22}} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

و طبیعتاً فرکانس آن مد برابر با هر یک از مقادیر بالاست. ضمناً بردار شکل مد به صورت معادله (۲۶) به دست می‌آید (مثل سیستم دو درجه آزادی با فنرهای مجزا شده‌ی K_2 و K_3 از محل گره):

$$\phi_i = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{K_2}{K_3} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

پس از تعیین K_{21} از رابطه ۲۳، K_{22} از رابطه ۲۱ محاسبه و بردار مود از رابطه ۲۴ به دست می‌آید.

۳- تعیین مدهای ارتعاش و فرکانس‌های متناظر در سیستم‌های با سه درجه آزادی

ممکن است مقادیر جرم و فنر به گونه‌ای باشند که در یکی از مدها در محل جرم میانی گره تشکیل شود. از این رو باید در هر حالت امکان رخداد این وضعیت در ابتدا بررسی شود.

ب- تعیین شکل مد و فرکانس در مدهایی که گره در محل جرم میانی (m_2) تشکیل نمی‌شود

در این حالت برای تعیین شکل مد و فرکانس، بین هر دو جرم یک گره در نظر گرفته می‌شود (شکل ۸):
همچون گذشته برای هر مد i می‌توان نوشت ($i \leq 3$):

$$\omega_i = \sqrt{\frac{K_1 + K_{21}}{m_1}} = \sqrt{\frac{K_{22} + K_{32}}{m_2}} = \sqrt{\frac{K_{33}}{m_3}} \quad (27)$$

از سوی دیگر برای فنرهای سری، معادله‌های (۲۸) و (۲۹) را می‌توان در نظر گرفت:

۳-۱- سیستم پایدار

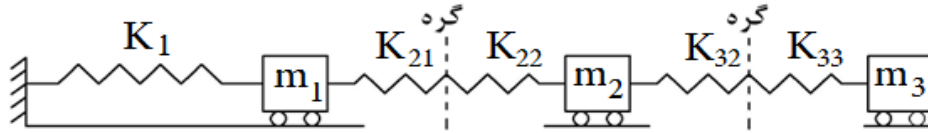
این سیستم به خاطر داشتن یک یا دو تکیه گاه و اتصال پی در پی جرم‌ها پایدار است.

۳-۱-۱- سیستم پایدار با یک تکیه‌گاه

سیستم اخیر را می‌توان به صورت شکل ۷ مدل کرد. بررسی این مسئله برای دو حالت تشکیل و عدم تشکیل گره در محل جرم میانی در ادامه آمده است.

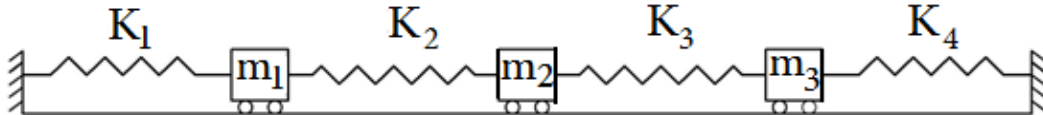
الف- تشکیل گره در جرم میانی (m_2) و تعیین شکل مد و فرکانس

در صورت برقراری معادله (۲۵) بین مقادیر جرم و سختی، در یکی از مدها، گره در محل جرم m_2 تشکیل می‌گردد:



شکل ۸. سختی فنرهای مجزا شده از محل گره برای شکل ۷.

Fig. 8. The stiffness of divided springs from the node location for Figure 7



شکل ۹. مدل دینامیکی سیستم با سه درجه آزادی و دو تکیه گاه.

Fig. 9. Dynamic model of a 3-DOFs system which has two supports

۳-۱-۲- سیستم پایدار با دو تکیه گاه

این سیستم به صورت شکل ۹ مدل می شود:

در این حالت نیز ابتدا باید امکان تشکیل گره در محل جرم میانی بررسی

شود.

الف- تشکیل گره در جرم میانی (m_2)

در صورت برقراری معادله (۳۱)، در محل جرم m_2 ، گره تشکیل

می گردد:

$$\sqrt{\frac{K_1 + K_2}{m_1}} = \sqrt{\frac{K_3 + K_4}{m_3}} \quad (31)$$

و فرکانس آن مد برابر با هر یک از مقادیر بالا خواهد بود. ضمناً بردار

شکل آن مد به صورت زیر حاصل می شود (مشابه سیستم با دو درجه آزادی

با فنرهای مجزا شده ی K_2 و K_3 از محل گره):

$$\phi_i = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{K_2}{K_3} \end{Bmatrix} \quad (32)$$

$$K_2 = \frac{K_{21}K_{22}}{K_{21} + K_{22}} \quad (28)$$

$$K_3 = \frac{K_{32}K_{33}}{K_{32} + K_{33}} \quad (29)$$

بدین ترتیب از دو معادله اخیر سختی فنرهای مجزا شده و فرکانس هر

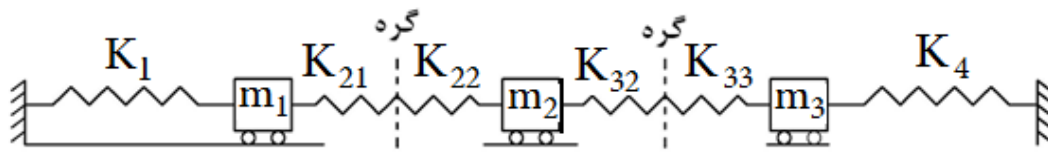
مد حاصل می شود. بردار شکل مد ۱ به صورت معادله (۳۰) تعیین می شود:

$$\phi_i = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{K_{21}}{K_{22}} \\ \frac{K_{32}}{K_{33}} \times \frac{K_{21}}{K_{22}} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

چنانچه تنها دو بردار جواب برای ϕ_i حاصل شود، در مد دیگر در محل

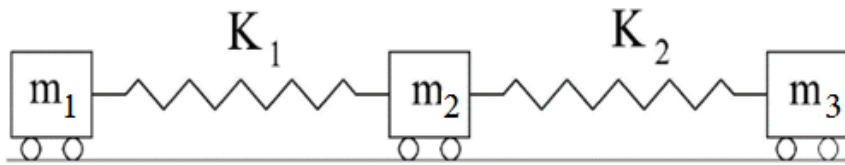
جرم میانی، گره تشکیل شده است (البته شکل مد متناظر با چنین وضعیتی

طبق معادله (۲۶) بیان گردیده است).



شکل ۱۰. سختی فنرهای مجزا شده از محل گره برای شکل ۹

Fig. 10. The stiffness of divided springs from the node location for Figure 9



شکل ۱۱. مدل دینامیکی سیستم با سه درجه آزادی و بدون تکیه گاه.

Fig. 11. Dynamic model of a 3-DOFs system without support

مد حاصل می‌شود. بردار شکل مد i همچون گذشته به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\phi_i = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{K_{21}}{K_{22}} \\ \frac{K_{32}}{K_{33}} \times \frac{K_{21}}{K_{22}} \end{Bmatrix} \quad (36)$$

چنانچه تنها دو بردار برای ϕ_i حاصل شود، در مد دیگر در محل جرم میانی، گره تشکیل شده است (البته شکل مد متناظر با چنین وضعیتی طبق معادله (۳۲) بیان گردیده است).

۳-۲- سیستم ناپایدار

در این بخش سیستم بدون تکیه‌گاهی که سه جرم به طور متوالی در ادامه یکدیگر هستند، بررسی می‌گردد. مدل جرم و فنر در این حالت مطابق با شکل ۱۱ است.

ب- تعیین شکل مد و فرکانس در مدهایی که گره در محل جرم میانی (m_2) تشکیل نمی‌شود
در این حالت، بین هر دو جرم یک گره در نظر گرفته می‌شود (شکل ۱۰):
همچون گذشته برای مد i می‌توان نوشت ($i \leq 3$):

$$\omega_i = \sqrt{\frac{K_1 + K_{21}}{m_1}} = \sqrt{\frac{K_{22} + K_{32}}{m_2}} = \sqrt{\frac{K_{33} + K_4}{m_3}} \quad (33)$$

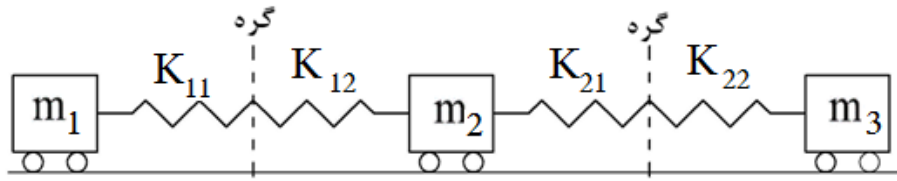
ضمناً برای فنرهای سری، دو معادله (۳۴) و (۳۵) را می‌توان در نظر

گرفت:

$$K_2 = \frac{K_{21}K_{22}}{K_{21} + K_{22}} \quad (34)$$

$$K_3 = \frac{K_{32}K_{33}}{K_{32} + K_{33}} \quad (35)$$

بدین ترتیب از معادلات بالا سختی فنرهای مجزا شده و فرکانس هر



شکل ۱۲. سختی فنرهای مجزا شده از محل گره برای شکل ۱۱.

Fig. 12. The stiffness of divided springs from the node location for Figure 11

تساوی‌های زیر برقرار است:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{K_{11}}{m_1}} = \sqrt{\frac{K_{12} + K_{21}}{m_2}} = \sqrt{\frac{K_{22}}{m_3}} \quad (39)$$

از سوی دیگر بین سختی فنرها دو رابطه بعد حاکم است:

$$K_1 = \frac{K_{11}K_{12}}{K_{11} + K_{12}} \quad (40)$$

$$K_2 = \frac{K_{21}K_{22}}{K_{21} + K_{22}} \quad (41)$$

با حل معادلات بالا برای هر یک از سختی‌های فنرهای سری، یک یا دو جواب به دست می‌آید. بنابراین در کنار مد صلب، یک یا دو بردار شکل مد باقی‌مانده ساخته می‌شود:

$$\phi_i = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -\frac{K_{11}}{K_{12}} \\ \frac{K_{11}}{K_{12}} \times \frac{K_{21}}{K_{22}} \end{array} \right\} \quad (42)$$

طبیعی است که با توجه به ناپایداری بودن سیستم، مد صلب متناظر با $\omega_1 = 0$ وجود دارد. حال به بررسی و تعیین سایر مدها پرداخته می‌شود.

الف- تشکیل گره در جرم میانی و تعیین شکل مد

در صورت برقراری معادله (۳۷)، در محل جرم میانی گره تشکیل

می‌شود:

$$\sqrt{\frac{K_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{K_2}{m_3}} \quad (37)$$

در این صورت فرکانس مد مزبور برابر با هر یک از مقادیر طرفین تساوی بالا خواهد بود. بردار شکل مد به سادگی تعیین می‌شود:

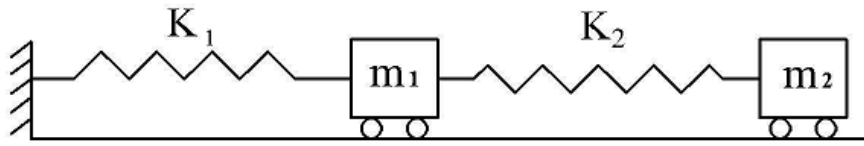
$$\phi_i = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -\frac{K_1}{K_2} \end{array} \right\} \quad (38)$$

ب- تعیین شکل مد و فرکانس در مدهایی که گره در محل

جرم میانی (m_2) تشکیل نمی‌شود

مد (مدهای) باقی‌مانده که در آن (آنها) گره در محل جرم میانی تشکیل نمی‌شود، با فرض تشکیل گره بین اجرام مجاور قابل تعیین خواهد بود (شکل ۱۲):

در هر مد بین فرکانس و مقادیر جرم و سختی فنرهای شکل ۱۲



شکل ۱۳. مدل دینامیکی و جرم و فنرهای مثال ۱.

Fig. 13. Dynamic model of Ex.1 and relevant lumped mass and spring.

$$K_{21} = \begin{Bmatrix} -11668 \\ 116553 \end{Bmatrix}, \quad K_{22} = \begin{Bmatrix} 9236 \\ 71461 \end{Bmatrix}$$

فرکانس‌ها به سادگی تعیین می‌شوند:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{K_{22}}{66}} \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{9236}{66}} = 11.83 \text{ rad/s},$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{71461}{66}} = 32.90 \text{ rad/s}$$

درایه اول از هر دو جواب K_{11} و K_{12} ، مربوط به مدی است که جابجایی دو جرم هم جهت بوده، بین دو جرم گره‌ی حقیقی تشکیل نمی‌شود. بلکه به لحاظ تئوری، گره‌ی تشکیل شده است که از لحاظ فیزیکی قابل تصور نیست. بنابراین بردارهای شکل مد اول و دوم به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\phi_i = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{K_{21}}{K_{22}} \end{Bmatrix} \Rightarrow \phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{11668}{9236} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.26 \end{Bmatrix},$$

$$\phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{116553}{71461} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.63 \end{Bmatrix}$$

نهایتاً ماتریس مدال به شکل زیر خواهد بود:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.26 & -1.63 \end{bmatrix}$$

همانگونه که مشاهده می‌شود مدها و فرکانس‌ها بلافاصله پس از حل دو معادله‌ی دو مجهولی تعیین می‌گردند. اگر خواسته شود مستقیماً از معادله (۱۸) استفاده شود، با کمک جایگذاری مقادیر در آن معادله می‌توان نوشت:

چنانچه تنها یک بردار برای ϕ_i حاصل شود، در مد غیرصلب دیگر در محل جرم میانی، گره تشکیل شده است (البته شکل مد متناظر با چنین وضعیتی طبق معادله (۳۷) بیان گردید).

۴- مثال‌ها

برای اختصار در متن، تنها خلاصه‌ی مثال‌ها آمده است. البته واحدهای پارامترها در مثال‌ها به واحدهای دستگاه SI تبدیل شده‌اند.

مثال ۱

این مثال از مرجع [۱۱] انتخاب شده است. ساختمانی با دو طبقه و فولادی به صورت شکل ۱۳ مدل شده است. مقادیر جرم و سختی‌ها داده شده است. فرکانس‌های طبیعی و مدهای آن خواسته شده است.

$$K_1 = 30700 \text{ N/m}, K_2 = 44300 \text{ N/m},$$

$$m_1 = 136 \text{ kg}, \quad m_2 = 66 \text{ kg}$$

الف- حل با روش پیشنهادی

با فرض گره در نقطه‌ی نامعلومی بین جرم‌های متمرکز در شکل ۱۳ و با کمک معادلات بخش ۲-۲ و شکل ۴ می‌توان نوشت:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{30700 + K_{21}}{136}} = \sqrt{\frac{K_{22}}{66}}$$

$$44300 = \frac{K_{21}K_{22}}{K_{21} + K_{22}}$$

با حل دو معادله‌ی دو مجهولی بالا (برای K_{12}, K_{22}) مقادیر زیر

حاصل می‌شوند:

بنابراین ماتریس مدال به شکل زیر خواهد بود:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.26 & -1.63 \end{bmatrix}$$

مثال ۲

در مدل جرم و فنر شکل ۲ بردارهای مد و فرکانس‌های متناظر را تعیین

کنید [۱۰].

$$m_1 = 2m \quad m_2 = m \quad K = 2k$$

الف- حل با روش پیشنهادی

با توجه به ناپایداری استاتیکی سیستم، یکی از مدها مد صلب است:

$$\omega_1 = 0 \rightarrow \phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

مد دیگر با فرض گره در حد فاصل بین دو جرم و نوشتن معادلات مورد

نیاز به دست می‌آید

:

$$K = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} = 2k$$

فرکانس ارتعاش در این مد در تساوی زیر صدق می‌کند:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K_1}{2m}} = \sqrt{\frac{K_2}{m}}$$

بنابراین:

$$K_1 = 6k \quad K_2 = 3k$$

با کمک رابطه زیر بردار مد غیرصلب حاصل می‌گردد:

$$\frac{\phi_{22}}{\phi_{21}} = -\frac{K_1}{K_2} \Rightarrow \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

بنابراین ماتریس مدال به شکل زیر خواهد بود:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\phi_i = \left\{ -\frac{1}{2} \left[1 + \frac{136}{66} - \frac{30700}{44300} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{136}{66} - \frac{30700}{44300} \right)^2 + 4 \times \frac{30700}{44300}} \right] + 1 \right\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.26 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.63 \end{Bmatrix}$$

علامت منفی پشت علامت رادیکال، منجر به بردار با عناصر هم علامت

شده است و مد اول را نشان می‌دهد.

ب- حل با روش مرسوم در ادبیات فنی دینامیک سازه‌ها

[۸-۱۰]

ماتریس سختی مدل:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30700 + 44300 & -44300 \\ -44300 & 44300 \end{bmatrix}$$

ماتریس جرم متمرکز:

$$M = \begin{bmatrix} 136 & 0 \\ 0 & 66 \end{bmatrix}$$

ساخت ماتریس $[K - \omega_n^2 M]$ و برابر قرار دادن دترمینان آن با

صفر برای تعیین فرکانس طبیعی مدهای ارتعاش:

$$\begin{vmatrix} K - \omega_n^2 M \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 75000 - 136 \omega_n^2 & -44300 \\ -44300 & 44300 - 66 \omega_n^2 \end{vmatrix} = 0$$

حل معادله‌ی درجه دوم (برحسب متغیر ω_n^2) زیر:

$$8976 \omega_n^4 - 10974000 \omega_n^2 + 1.36 e9 = 0$$

بنابراین فرکانس طبیعی مدها و بردارهای شکل آن‌ها حاصل می‌شود:

$$\omega_1 = 11.8 \text{ rad/s} \quad \omega_2 = 32.9 \text{ rad/s}$$

بنابراین بردارهای شکل مد به صورت زیر تعیین می‌گردند:

$$\begin{bmatrix} 75000 - 136 \omega_n^2 & -44300 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \phi_{12} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.26 \end{Bmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.63 \end{Bmatrix}$$

مثال ۳

ب- حل با روش موجود در ادبیات فنی دینامیک سازه‌ها

[۸-۱۰]

در مدل جرم و فنر شکل ۷ با توجه به مقادیر زیر بردارهای مد و فرکانس‌های متناظر را تعیین کنید.

ماتریس سختی مدل:

$$K_1 = 9 \text{ N/m}, K_2 = 6 \text{ N/m}, K_3 = 5 \text{ N/m},$$

$$m_1 = 3 \text{ kg}, m_2 = 2 \text{ kg}, m_3 = 1 \text{ kg}$$

$$K = \begin{bmatrix} 2k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix}$$

ماتریس جرم متمرکز:

$$M = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

ساخت ماتریس $[K - \omega_n^2 M]$ و برابر قرار دادن دترمینان آن با صفر برای تعیین فرکانس طبیعی مدهای ارتعاش:

$$|K - \omega_n^2 M| = \begin{vmatrix} 2k - 2m\omega_n^2 & -2k \\ -2k & 2k - m\omega_n^2 \end{vmatrix} :$$

حل معادله‌ی درجه دوم (برحسب ω_n^2):

$$2m\omega_n^4 - 6k\omega_n^2 = 0$$

بنابراین فرکانس طبیعی مدها و بردارهای شکل آن‌ها حاصل می‌شود:

$$\omega_1 = 0 \text{ rad/s} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \text{ rad/s}$$

بنابراین بردارهای شکل مد به صورت زیر تعیین می‌گردند:

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$[2k - 6k \quad -2k] \begin{Bmatrix} 1 \\ \phi_{2i} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

بنابراین ماتریس مدال به شکل زیر خواهد بود:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

الف- حل با روش پیشنهادی

ابتدا امکان تشکیل گره در محل جرم میانی بررسی می‌شود (معادله ۲۵):

$$\sqrt{\frac{K_1 + K_2}{m_1}} = \sqrt{\frac{9 + 6}{3}} = \sqrt{5}$$

$$\sqrt{\frac{K_3}{m_3}} = \sqrt{\frac{5}{1}} = \sqrt{5}$$

بنابراین در یکی از مدها در محل جرم میانی گره تشکیل شده و فرکانس مد، همان مقدار بالا یعنی $\sqrt{5}$ خواهد بود. به سادگی بردار شکل آن مد تعیین می‌شود (معادله ۲۶).

$$\phi_i = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{K_2}{K_3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{6}{5} \end{Bmatrix}$$

سایر مدهای ارتعاش با فرض گره در فاصله بین هر دو جرم مجاور قابل دستیابی است. با توجه به شکل ۸ و معادلات ۲۷، ۲۸ و ۲۹ می‌توان معادلات زیر را نوشت:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{9 + K_{21}}{3}} = \sqrt{\frac{K_{22} + K_{32}}{2}} = \sqrt{\frac{K_{33}}{1}},$$

$$6 = \frac{K_{21}K_{22}}{K_{21} + K_{22}}, \quad 5 = \frac{K_{32}K_{33}}{K_{32} + K_{33}}$$

با حل معادلات فوق مقادیر سختی‌ها و فرکانس‌ها به دست می‌آید:

$$K_{21} = \begin{Bmatrix} 19.68 \\ -6.18 \end{Bmatrix}, \quad K_{22} = \begin{Bmatrix} 8.63 \\ 3.04 \end{Bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 15 & -6 & 0 \\ -6 & 11 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

ماتریس جرم متمرکز:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ساخت ماتریس $[K - \omega_n^2 M]$ و برابر قرار دادن دترمینان آن با صفر برای تعیین فرکانس طبیعی مدهای ارتعاش:

$$|K - \omega_n^2 M| = \begin{vmatrix} 15 - 3\omega_n^2 & -6 & 0 \\ -6 & 11 - 2\omega_n^2 & -5 \\ 0 & -5 & 5 - \omega_n^2 \end{vmatrix} = 0$$

با حل معادله بالا (درجه سه از ω_n^2)، فرکانس طبیعی مدها و بردارهای شکل آن‌ها حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0.97 \text{ rad/s} \\ \omega_2 &= 2.23 \text{ rad/s} \\ \omega_3 &= 3.09 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

بنابراین بردارهای شکل مد به صورت زیر تعیین می‌گردند:

$$\begin{cases} (15 - 3 \times 0.97^2) \times 1 - 6 \times \phi_{21} = 0 \\ -6 \times 1 + (11 - 2 \times 0.97^2) \times \phi_{12} - 5 \times \phi_{31} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi_{21} = 2.03 \\ \phi_{31} = 2.50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (15 - 3 \times 2.23^2) \times 1 - 6 \times \phi_{22} = 0 \\ -6 \times 1 + (11 - 2 \times 2.23^2) \times \phi_{22} - 5 \times \phi_{32} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi_{22} = 0.01 \\ \phi_{32} = -1.20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (15 - 3 \times 3.09^2) \times 1 - 6 \times \phi_{23} = 0 \\ -6 \times 1 + (11 - 2 \times 3.09^2) \times \phi_{23} - 5 \times \phi_{33} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi_{23} = -2.27 \\ \phi_{33} = 2.48 \end{cases}$$

بنابراین ماتریس مدال به صورت ماتریسی که در ادامه آمده است، بیان می‌شود:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2.03 & 0.01 & -2.27 \\ 2.50 & -1.20 & 2.48 \end{bmatrix}$$

$$K_{32} = \begin{Bmatrix} 10.49 \\ -1.16 \end{Bmatrix}, \quad K_{33} = \begin{Bmatrix} 9.56 \\ 0.94 \end{Bmatrix}$$

عناصر اول در ماتریس‌های ستونی بالا برای ω_i یک جواب را تولید می‌کنند و عناصر دوم هم همین‌طور. بنابراین فرکانس دو مد باقی‌مانده به سادگی حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{K_{33}} = \sqrt{0.94} = 0.97 \text{ rad/s} \\ \omega_3 &= \sqrt{K_{33}} = \sqrt{9.56} = 3.09 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

با توجه به حدود مقادیر به دست آمده، فرکانس‌های مزبور مربوط به مد اول و سوم هستند ($\omega_2 = \sqrt{5} \approx 2.24$). با کمک معادله (۳۰) بردارهای شکل سایر مدها ساخته می‌شود:

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{K_{21}}{K_{22}} = -\frac{-6.18}{3.04} \\ \frac{K_{32}}{K_{33}} \times \frac{K_{21}}{K_{22}} = \frac{-1.16}{0.94} \times \frac{-6.18}{3.04} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.03 \\ 2.51 \end{Bmatrix}$$

به همین ترتیب:

$$\phi_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{19.68}{8.63} \\ \frac{10.49}{9.56} \times \frac{19.68}{8.63} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2.28 \\ 2.50 \end{Bmatrix}$$

بنابراین ماتریس مدال سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2.03 & 0 & -2.28 \\ 2.51 & -1.20 & 2.50 \end{bmatrix}$$

ب- حل با روش مرسوم در ادبیات فنی دینامیک سازه‌ها

[۸-۱۰]

ماتریس سختی مدل:

مثال ۴

بررسی مثال ۳ برای حالتی که مدل فاقد تکیه‌گاه (ناپایدار) است و در حد تعیین فرکانس‌های ارتعاش، خواسته شده است. برای حل این مثال، شکل ۱۱ با مقادیر زیر در نظر گرفته شده است:

$$K_1 = 6 \text{ N/m}, K_2 = 5 \text{ N/m}, m_1 = 3 \text{ kg}, m_2 = 2 \text{ kg}, m_3 = 1 \text{ kg}$$

الف- حل با روش پیشنهادی

طبیعی است که با توجه به ناپایدار بودن سیستم، مد صلب با فرکانس $\omega_1 = 0$ وجود دارد. ابتدا امکان تشکیل گره در محل جرم میانی بررسی می‌شود (معادله ۳۷):

$$\sqrt{\frac{K_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2} \neq \sqrt{\frac{K_2}{m_3}} = \sqrt{\frac{5}{1}} = \sqrt{5}$$

بنابراین گره در محل جرم میانی تشکیل نمی‌گردد. اکنون با کمک معادلات ۴۰ تا ۴۲ حالتی که گره در فاصله بین جرم‌ها تشکیل می‌گردد، بررسی می‌شود (شکل ۱۲):

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K_{11}}{m_1}} = \sqrt{\frac{K_{12} + K_{21}}{m_2}} = \sqrt{\frac{K_{22}}{m_3}} \Rightarrow \sqrt{\frac{K_{11}}{3}} = \sqrt{\frac{K_{12} + K_{21}}{2}} = \sqrt{K_{22}}$$

$$6 = \frac{K_{11}K_{12}}{K_{11} + K_{12}}, \quad 5 = \frac{K_{21}K_{22}}{K_{21} + K_{22}}$$

با حل معادلات فوق مقادیر زیر به دست می‌آید:

$$K_{11} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{4}(25 + \sqrt{145}) \\ \frac{3}{4}(25 - \sqrt{145}) \end{array} \right\}, \quad K_{12} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3}(35 - \sqrt{145}) \\ \frac{1}{3}(35 + \sqrt{145}) \end{array} \right\}$$

$$K_{21} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{6}(1 + \sqrt{145}) \\ \frac{5}{6}(1 - \sqrt{145}) \end{array} \right\}, \quad K_{22} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}(25 + \sqrt{145}) \\ \frac{1}{4}(25 - \sqrt{145}) \end{array} \right\}$$

اکنون در کنار فرکانس مود صلب $\omega_1 = 0$ ، به سادگی فرکانس دو مد

باقی‌مانده به دست می‌آید:

$$\omega_2 = \sqrt{K_{22}} = \frac{1}{2} \sqrt{25 - \sqrt{145}} \approx 1.800 \text{ rad/s}$$

$$\omega_3 = \sqrt{K_{22}} = \frac{1}{2} \sqrt{25 + \sqrt{145}} \approx 3.043 \text{ rad/s}$$

ب- حل با روش مرسوم در ادبیات فنی دینامیک سازه‌ها

[۸-۱۰]

ماتریس سختی مدل:

$$K = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -6 & 11 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

ماتریس جرم متمرکز:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ساخت ماتریس $[K - \omega_n^2 M]$ و برابر قرار دادن دترمینان آن با صفر برای تعیین فرکانس طبیعی مدهای ارتعاش:

$$|K - \omega_n^2 M| = \begin{vmatrix} 6 - 3\omega_n^2 & -6 & 0 \\ -6 & 11 - 2\omega_n^2 & -5 \\ 0 & -5 & 5 - \omega_n^2 \end{vmatrix} = 0$$

حل معادله فوق، دقیقاً به همان مقادیر روش پیشنهادی منجر می‌شود:

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_{2,3} = \sqrt{K_{22}} = \frac{1}{2} \sqrt{25 \pm \sqrt{145}} \approx 1.800 \text{ rad/s},$$

$$3.043 \text{ rad/s}$$

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله روشی نوین و ساده در تعیین بردارهای مدهای ارتعاش و فرکانس‌های نظیر برای سیستم‌های با چند درجه آزادی بیان شده است.

Measurement and FE Analysis". International Journal of High-Rise Building, Vol. 3, No. 4, pp. 305-310.

- [5] M. Jalili Sadr Abad, M. Mahmoudi and E. H. Dowell (2017), "Dynamic Analysis of SDOF Systems Using Modified Energy Method". ASIAN JOURNAL OF CIVIL ENGINEERING (BHRC), Vol. 18, No. 7, pp. 1125-1146.
- [6] I. Mehdipour, D.D. Ganji, M. Mozaffari (2010) "Application of the Energy Balance method to nonlinear vibrating equations". Current Applied Physics, Vol.10, pp. 104-12.
- [7] H. Babazadeh, D.D. Ganji, M. Akbarzade, (2008), "He's energy balance method to evaluate the effect of amplitude on the natural frequency in nonlinear vibration systems". Progress in Electromagnetic Research M, Vol. 4, pp. 143-154.
- [8] M. Paz and W. Leigh (2005), "Structural Dynamic: Theory and Computation". Kluwer Academic Publishers, 5th Ed., USA.
- [9] Anil K. Chopra (2012), "Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering". PRENTICE-HALL, 4th Ed. USA.
- [10] K. Bargi (2018), "Dynamic of Structures". 2nd ed., University of Tehran Pub., Tehran, Iran (in Persian).
- [11] M. M. Khatibi, M. R. Ashory and A. R. Albooyeh (2010), "Numerical and Experimental Consideration of Frequency Domain Decomposition Method for Modal Parameters Identification of Structure". Journal of Modeling in Engineering, Vol.8, No.21, pp. 83-95, (in Persian).
- [12] H. Sarparast, M.R. Ashory, P. Ebadi and M.M. Khatibi. (2013), "Modal Parameter Identification of a Structure Subjected to Ambient Load Using Output Analysis". Modares Mechanical Engineering, Vol.13, No.5, pp. 63-73, URL: <http://journals.modares.ac.ir/article-15-6751-fa.html> (in Persian).
- [13] E. Ghandi and B. Rafezy, (2016), "The effect of axial loads on free vibration of symmetric frame structures using continuous system method". Journal of

اساس این روش یافتن نقطه‌ای (نقاطی) در فاصله‌ی جرم‌های مجاور است که در هر مد جابه‌جایی آن صفر است. به این نقاط گره‌ی ارتعاش اطلاق شده است.

یکی از مزایای مهم این روش نسبت به روش مرسوم، ایجاد درک فیزیکی بهتر نسبت به مفهوم مدهای مختلف است. از سوی دیگر تعداد مراحل تعیین فرکانس‌های مدی در روش مطرح شده از روش مرسوم کوتاه‌تر است.

ضمناً همچون روش مرسوم، روش بیان شده قابلیت استفاده به صورت برنامه‌های رایانه‌ای را داراست. چنانچه از حل مثال‌ها فهمیده می‌شود، اختلاف ناچیز بین پاسخ‌های متناظر در روش‌های حل تنها به خاطر عملیات ریاضی و تعداد ارقام پس از ممیز است. روش بیان شده یک روش تحلیلی است و منجر به پاسخ‌های دقیق می‌شود. هر چند که در این مقاله تنها به سیستم‌های دینامیکی با دو و سه درجه آزادی پرداخته شده است، به دست آوردن روابط برای سیستم‌ها با درجات آزادی بالاتر مشابه روش بیان شده در سیستم‌های دو و سه درجه آزادی است. هدف اصلی این مقاله صرفاً بیان روش بوده، لذا اغلب از به دست آوردن روابط طولانی اجتناب شده است.

۶- فهرست علائم

منابع

- [1] R. W. Clough and J. Penzin (2003), "Dynamics of Structures". 2nd ed., CSI Computers & Structures, Berkeley, Calif., USA.
- [2] M.A. Namjooyan, M.R. Karimian, H. Borsalani and R. Rahgozar (2014), "A New Equation for Estimating the Experimental Period of Steel Moment Frames". 5th National Conference on Earthquake and Structures, Kerman, Iran (in Persian).
- [3] F. Ahmadi Danesh and E. Rafiee (2015), "Effects of Upper Modes on the Seismic Behavior of Tall Buildings". International Conference on Architectural, Civil and Urban in Millennium, Association of Iranian Architectures, Tehran, Iran (in Persian).
- [4] Do Hyun Kim and Ji Young Kim (2014), "Assessment on Natural Frequencies of Structures using Field

- Journal of Modeling in Engineering, Vol. 17, No. 58, pp. 15-25, (in Persian).
- [18] J.G.A. Croll (1975), "Coupled Vibration Modes", Journal of Sound and Vibration, Vol. 38, No.1, pp. 27-37.
- [19] S. Rajasekaran (2009), "Differential quadrature and transformation methods for vibration problems in relation to structural dynamics during earthquakes", A volume in Wood-head Publishing Series in Civil and Structural Engineering, pp. 525-567 (book).
- [20] J.A. Zakeri and M. Shahbabayee (2014), "Evaluation of Stiffness effect of Flexible Bases on Natural Frequencies and Vibration Modes in Free Vibration of Two- bay Beams", Journal of transportation engineering, Vol. 7, No. 1, pp. 45-54, (in Persian).
- [21] Xiantong Huang, Xiyan Hu and Lei Zhang (2007), "Physical parameters reconstruction of a fixed-fixed mass-spring system from its characteristic data", Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 206, pp. 645-655.
- Structural and Construction Engineering, Vol. 3, No. 2 pp. 86-100, (in Persian).
- [14] B. Rafezy, A. Zare and W. P. Howson (2007), "Coupled lateral-torsional frequencies of asymmetric, three-dimensional frame structures". International Journal of Solids and Structures, Vol. 44, pp. 128-144.
- [15] B. Rafezy and W. P. Howson (2008), "Vibration analysis of doubly asymmetric, three-dimensional structures comprising wall and frame assemblies with variable cross-section". Journal of Sound and Vibration, Vol. 318, No. 1-2, pp. 247-266.
- [16] B. Rafezy and W. P. Howson (2009), "Coupled lateral-torsional frequencies of asymmetric, three-dimensional structures comprising shear-wall and core assemblies with stepwise variable cross-section". Engineering Structures, Vol. 31, No. 8, pp. 1903-1915.
- [17] M. bambaechee and M. Hoseinalizadeh Toni (2019), "Free vibration analysis of semi-rigid frames with elastic rotational restraints and inhomogeneous members".

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

A. A. Safavi , A new method for determining natural modes and their frequencies with the concept of node in vibrations of M-DOFs, Amirkabir J. Civil Eng., 54(1) (2022) 229-246.

DOI: [10.22060/ceej.2021.18638.6913](https://doi.org/10.22060/ceej.2021.18638.6913)

